

Contrôle final

L'épreuve dure 2h plus tiers-temps si nécessaire. Vous pouvez utiliser librement le formulaire à la fin du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de justifier les réponses.

Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées.

A l'intérieur de chaque partie, rédigez dans l'ordre SVP quitte à laisser des blancs et revenir sur un exercice plus tard, cela facilite grandement le travail des correcteurs.

Chaque partie est notée sur 10 points et sera notée séparément pour un total sur 20.

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Exercice 1 (4 points). Trouver les transformées de Fourier des fonctions suivantes. On rappelle que $1_{[a,b]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$ (donc qui vaut 1 sur l'intervalle et 0 en dehors de celui-ci). On admettra que les fonctions sont bien absolument intégrables.

1.

$$f(t) = |t|1_{[-1,1]}(t).$$

2.

$$f(t) = 2i \sin(t)1_{[-\pi,\pi]}(t).$$

Exercice 2 (6 points). Est-ce que les **séries** de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ suivantes convergent uniformément sur l'intervalle $I =]0, 1]$ pour le terme général u_n qui vaut :

1.

$$u_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2}.$$

2.

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 x^2}.$$

3.

$$u_n(x) = \frac{1}{x+n}.$$

TOURNER LA PAGE SVP.

Partie II (à rédiger sur une deuxième copie)

Exercice 3 (3 points). Trouver la fonction $f(x)$ dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f](s)$ vaut :

1.

$$\frac{1}{1-s^2}.$$

2.

$$\frac{1}{s(1-s^2)}.$$

Exercice 4 (7 points). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction **paire** et 2π -périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$. On admet qu'elle est C^1 par morceaux.

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Déterminer la série de Fourier Sf de f .

3. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ? Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?

4. En déduire la valeur de la somme de $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)(2p+3)}$.

5. Evaluer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2(2p+3)^2}.$$

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

- (1) Les coefficients de Fourier de f T -périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x) dx, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x) dx, \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x) dx.$$

- (2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n(f') = n\omega b_n(f), \quad b_n(f') = -n\omega a_n(f).$$

- (3) La formule de Parseval, valable pour f T -périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

- (4) La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx.$$

- (5) Formule d'inversion s'écrit $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx} dp$.

- (6) Le produit de convolution est donné par $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$.

- (7) La formule de Plancherel s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp$.

- (8) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est donnée par $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$. On pourra aussi utiliser librement l'identité $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

Transformées de Fourier usuelles

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(9)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(10)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c p }$
(11)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s} \hat{h}\left(\frac{p}{s}\right)$
(12)	$\frac{1}{s} h\left(\frac{x}{s}\right), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(13)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa} \hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(14)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(15)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$
(16)	$e^{at} \cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + \omega^2}$ pour $s > a$
(17)	$e^{at} \sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$ pour $s > a$
(18)	$e^{at}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

Décomposition en éléments simples complexe de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leq j \leq m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!} \left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}} (Y(s)(s-s_i)^{m_i}) \right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i .

Décomposition réelle. Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_l)^{m_l} ((s-a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdots ((s-a_\lambda)^2 + b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^\lambda \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j} + sd_{i,j}}{((s-a_i)^2 + b_i^2)^j}.$$